

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Zakres egzaminu magisterskiego

Wybrane rozdziały analizy i topologii 1 i 2

Pojęcia, fakty: Definicje i pojęcia: metryka, iloczyn skalarny, norma supremum, norma całkowita, zbiór otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty, średnica zbioru, zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego, zbieżność w metryce całkowitej, odległość punktu od zbioru, ciągłość funkcji, aproksymacja funkcji ciągłych wielomianami, twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu, obszar zbieżności, twierdzenie Cauchy'ego-Riemanna, całka krzywoliniowa, funkcje holomorficzne, funkcje całkowite, wzór całkowy Cauchy'ego, residuum, osobliwość pozorna, biegun, osobliwość istotna, funkcja skończenie addytywna, miara Lebesgue'a, zbiory miary zero, całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania:

1. Sprawdzić, czy funkcja $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

jest metryką.

2. Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcyjnym określonym na \mathbb{R}_+ następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ -n^2x + 2n & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{dla } x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Zbadać zbieżność punktową i jednostajną na \mathbb{R}_+ oraz w metryce całkowitej L^1 na przedziale $[0, 2]$.

3. Wyznaczyć obszar zbieżności (promień oraz zbadać zachowanie na

brzegu) szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n}.$$

4. Wykazać, że jeśli funkcja $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ jest analityczna w pewnym obszarze D oraz $u^2 = v$ w tym obszarze, to funkcja f musi być stała.

5. Przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego obliczyć całkę:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3},$$

gdzie $\gamma(t)$ jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $\frac{1}{2}$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

7. Pokazać, że norma supremum w przestrzeni $C[0, 1]$ (funkcje ciągłe na odcinku $[0, 1]$) nie spełnia warunku równoległoboku.

8. Pokazać, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego jest równa zero.

Biomatematyka

Pojęcia, fakty:

Modele wzrostu i rozwoju populacji (*model Malthusa i prawo Verhulsta, model Lotki-Volterra*), genetyka populacji (*prawa Mendla, prawo Hardy'ego-Weinberga,*), modele doboru naturalnego (*dobór przeciw homozygotom recesywnym, przeciw obu homozygotom, przeciw heterozygotom*), analiza zmienności DNA (*modele mutacji nukleotydów: model Jukes-Cantora, model Kimury*), sekwencjonowanie DNA (*dopasowywanie fragmentów restrykcyjnych, mapy restrykcyjne*), porównywanie sekwencji DNA, analiza statystyczna danych genetycznych.

Przykładowe zadania:

9. Liczba rodzin mająca chłopca i trzy dziewczynki i liczba rodzin mająca trzech chłopców i dziewczynkę pozostają w proporcji 5:6. Oblicz prawdopodobieństwo chłopca w tej społeczności rodzin.

10. Albinizm u myszy jest wywołany przez jeden gen recesywny. Myszkę albinotyczną krzyżujemy z myszką barwną z czystej linii. W drugim pokole-

niu potomnym otrzymujemy miot liczący cztery myszki (oczekiwany stosunek: trzy myszki zabarwione, jedna biała). Jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia w miocie:

- (a) trzech myszek zabarwionych i jednej białej;
- (b) przynajmniej jednej myszki białej;
- (c) jednej białej, dwóch heterozygot zabarwionych, jednej zabarwionej czystej linii;
- (d) dwóch samic białych i dwóch zabarwionych samców?

11. Dwoje rodziców wybrano losowo z populacji, w której genotypy AA , Aa i aa występują z częstościami u , $2v$, w . Proces ten jest powtarzany z ich potomkami kojarząc braci z siostrami. Znajdź prawdopodobieństwo, że rodzice w pierwszym, drugim jak i trzecim pokoleniu należą do genotypu AA (zob. Feller t. I, str. 404).

Statystyka matematyczna

Pojęcia, fakty: Wektory losowe (*dystrybuanty i gęstości wielowymiarowe, macierz kowariancji, korelacja, wielowymiarowy rozkład normalny*), przestrzenie statystyczne i statystyki (*przestrzeń prób, statystyki i ich rodziny rozkładów, rozkład empiryczny i dystrybuanta empiryczna, charakterystyki próbkowe, statystyki pozycyjne, rozkłady asymptotyczne statystyk*), dostateczność i zupełność statystyk (*kryterium faktoryzacji, wykładnicze rodziny rozkładów, statystyki zupełne*), estymacja (*estymatory nieobciążone, metoda momentów, metoda największej wiarygodności*), estymacja przedziałowa (*przedziały ufności dla parametrów rozkładu normalnego, przedziały ufności dla oszacowania prawdopodobieństwa zdarzenia*), testowanie hipotez statystycznych (*hipoteza prosta i złożona, obszar krytyczny, błąd I i II rodzaju, rozmiar testu, poziom istotności, lemat Neymana-Pearsona, testy ilorazu wiarygodności, test dla wartości średniej w populacji o rozkładzie normalnym, test porównania średnich, test dla wariancji, test χ^2 , test t-Studenta*), regresja liniowa i metoda najmniejszych kwadratów, współczynnik korelacji i testowanie jego istotności.

Przykładowe zadania:

12. Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) jest nieznanne i wy-

nosi $p \in [0, 1]$. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu albo wyczerpania się pocisków. Wykonano takie strzelanie. Zakładając, że kolejne strzały są niezależne, na podstawie zaobserwowanej liczby oddanych strzałów wyznaczyć estymatory parametru p :

- (a) nieobciążony z minimalną wariancją,
- (b) największej wiarygodności,
- (c) metodą momentów,

Zbadać nieobciążoność estymatorów i obliczyć ich ryzyka kwadratowe. Który z nich jest najlepszy?

13. Na podstawie próby $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ z rozkładu wykładniczego $Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$, testuje się hipotezę $H : \lambda = 1$ przy hipotezie alternatywnej $K : \lambda < 1$. Rozważa się dwa testy dla weryfikacji tej hipotezy z odpowiednimi obszarami krytycznymi:

$$S_1 = \left\{ \mathbf{x} : \sum_{i=1}^n x_i > c_1 \right\} \quad \text{i} \quad S_2 = \left\{ \mathbf{x} : x_{1:n} = \min_{i \geq 1} x_i > c_2 \right\},$$

gdzie stałe c_1 i c_2 są tak dobrane, aby testy miały rozmiar α .

- a) Jakie rozkłady mają statystyki wyznaczające obszary krytyczne S_1 i S_2 , zarówno przy hipotezie H , jak i przy alternatywach K ?
- b) Wyznaczyć funkcje mocy obu testów w takiej postaci, aby można było je obliczać przy użyciu zwykłych tablic statystycznych.
- c) Czy któryś z tych testów jest jednostajnie mocniejszy od drugiego?

14. Znaleźć przedział ufności na poziomie ufności 0.99 dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym, gdy na podstawie 25 obserwacji oszacowano wartość średnią i odchylenie standardowe.

15. Ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością do 0.1 i na poziomie ufności 0.95 średnią w rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 2$?

16. W USA średnia liczba dni pracy opuszczonych w ciągu roku z powodu choroby wynosi 5.1. W firmie zatrudniającej 49 pracowników średnia liczba dni straconych z powodu choroby wyniosła 7 dni, a odchylenie standardowe 2.5 dnia. Właściciel firmy chce sprawdzić, czy pracownicy w jego firmie odbiegają od typowych w całym kraju.

- a) Jaką powinien sformułować hipotezę zerową?
- b) Obliczyć poziom krytyczny dla tej hipotezy, zakładając, że obserwacje mają rozkład normalny.

c) Jaki wniosek może wyciągnąć właściciel po przeprowadzeniu tego testu?

Rachunek prawdopodobieństwa

Pojęcia, fakty: rozkład zmiennej losowej, gęstość rozkładu, nierówności związane z momentami (*nierówność Schwarz, nierówność Jensena, nierówność Czebyszewa*), lemat Borela-Cantelliego, prawdopodobieństwo warunkowe, typy zbieżności zmiennych losowych (*zbieżność prawie wszędzie, zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność według momentów, zbieżność według rozkładu*), funkcje charakterystyczne, twierdzenia graniczne (*słabe prawo wielkich liczb, mocne prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne*).

Przykładowe zadania:

17. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładach wykładniczych z parametrami α i μ .

- Znaleźć rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu.
- Obliczyć prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

18. Udowodnić, że jeśli ciąg zmiennych losowych $\{\sqrt{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^2 , to ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w L^1 .

19. Zmienna losowa X_λ ma rozkład Poissona z parametrem λ . Zbadać, dla $\lambda \rightarrow \infty$, zbieżność według rozkładu zmiennych losowych

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

20. Udowodnić, że jeśli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach $Var(X_N) \leq C < \infty$ $n = 1, 2, \dots$ oraz współczynnikach korelacji takich, że $\rho(X_i, X_j) \rightarrow 0$, gdy $|i - j| \rightarrow \infty$ to $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb.

Procesy stochastyczne

Pojęcia, fakty: klasyfikacja procesów stochastycznych (*procesy gaussowskie, procesy stacjonarne w szerszym sensie, procesy stacjonarne i o przyrostach stacjonarnych, procesy o przyrostach niezależnych, procesy Markowa*), łańcuchy Markowa i procesy Markowa w czasie ciągłym z przeliczalną przestrzenią stanów (*klasyfikacja stanów, rozkład stacjonarny, twierdzenia ergo-*

dyczne), proces urodzin i śmierci, proces Poissona, złożony proces Poissona, proces odnowy, proces Wienera (*podstawowe własności trajektorii, mocna własność Markowa, zasada odbicia*).

Przykładowe zadania:

21. Niech $S = \{1, \dots, m\}$, a P będzie macierzą podwójnie stochastyczną tj. macierzą stochastyczną taką, że dla wszystkich $j = 1, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1.$$

Udowodnić, że rozkład $\pi_i \equiv \frac{1}{m}$, $i = 1, \dots, m$, jest rozkładem stacjonarnym dla łańcucha Markowa z macierzą przejść P .

22. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem odnowy generowanym przez ciąg niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Niech $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciąg niezależnych, jednakoworozłożonych zmiennych losowych takim, że pary (X_n, R_n) , $n \geq 1$ są niezależne i jednakowo rozłożone. Niech $\{R(t), t \geq 0\}$ będzie procesem zdefiniowanym jako

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_n.$$

Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t}$ oraz podać jej postać.

23. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona z parametrem λ . Obliczyć $P(N(s) = k | N(t) = n)$ dla $s < t$.

24. Niech $\{W_t, t \geq 0\}$ będzie procesem ruchu Browna. Wykazać, że proces $\{X_t, t \geq 0\}$ zdefiniowany, dla ustalonego $T > 0$, jako $X_t = W_{T+t} - W_T$, jest również procesem ruchu Browna.